Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Développements :

Cardinal du cône nilpotent, Simplicité de SO_3.

Bibliographie :

Rombaldi Algèbre et géométrie, Rombaldi Thèmes pour l'agreg, H2G2, Perrin, Warrufel L2, OA, Nourdin, Gourdon, Mneimé

Rapport du jury 2016/2017

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $GL(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs, étudier la topologie et préciser pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser Sn dans $GL_n(K)$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $GL_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Intro

[Quand on étudie un groupe, il est très utile de connaître des générateurs qui soient le plus simple possible. Ainsi, les transpositions sont les générateurs privilégiés du groupe symétrique. Pour l'étude du groupe alterné, on utilise les 3-cycles. Une idée qui va nous guider : les transpositions sont, parmi les permutations différentes de l'identité celles qui ont le plus de points fixes.] [Algèbre et géométrie, Auliac, Delcourt, Goblot]

1 Présentation de GL(E) et $SL(E)$

Cadre : E désigne un K-ev de dim finie.

1.1 Définition, interprétation matricielle

Définition 1 (Romb p125). *[Perrin p95] $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E.*

Définition 2 (Romb p125). *[Perrin p95] $GL_n(K)$.*

Proposition 3 (Romb p125). *[Perrin p95] La donnée d'une base de E définit un isomorphisme de $GL(E)$ sur $GL_n(K)$.*

Remarque 4 (Nourdin p225). *[Perrin p31] Son intérêt est de fournir un outil pour l'étude de $GL(E)$: le calcul matriciel.*

Proposition 5 (Szpirglas p294). *[Gourdon p136] $f \mapsto (mat(f, B))$ ne dépendent pas de la base, on peut donc définir* $\det(f)$. *De même avec la trace. Le déterminant est invariant par changement de base.*

Proposition 6 (Romb p126). *$u \in GL(E)$ si et seulement si u injectif si et seulement si u surjectif si et seulement si inversible à gauche si et seulement si inversible à droite si et seulement si* $\det(u) \neq 0$.

Exemple 7. *$I_n + E_{ij}$, exp d'une matrice inversible.*

Remarque 8. *Faux en dim infinie. $u \in \mathcal{L}(K[X])$, défnit par $u(P) = P'$ est surjectif mais non injectif.*

Proposition 9 (Perrin p95). $\det$ *est un morphisme de $GL(E)$ dans K^*. Son noyau est $SL(E)$.*

Définition 10. *SL_n.*

Proposition 11 (Romb p127). *$SL(E)$ est un sous-groupe distingué isomorphe à $SL_n(K)$, le groupe quotient $GL(E)/SL(E)$ est isomorphe à K^*.*

Exemple 12. *Matrices de permutations paires, exp(A) si $Tr(A) = 0$.*

Proposition 13 (Romb p143). *Cardinaux de $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un F_q-ev.*

Exemple 14. *$GL_2(F_2)$.*

Corollaire 15 (Romb p144). *Nombre de sev de dim p dans E.*

Application 16 (Romb p146). *Dénombrer les matrices à coeff dans F_q qui sont nilpotentes.*

Application 17 (Romb p148). *Dénombrer les automorphismes d'un F_q-ev de dim n.*

Proposition 18 (OA). *$GL_n(K)$ isomorphe à $GL_m(K)$ si et seulement si $n = m$.*

1.2 Générateurs : transvections et dilatations

Remarque 19 (Goblot, Delcourt p179)**.** *Soit H un hyperplan. On s'intéresse aux endomorphismes de E qui fixent tous les éléments. Il y en a deux sortes : les transvections et les dilatations.*

Définition 20 (Perrin p97)**.** *Transvection.*

Définition 21 (Perrin p98)**.** *Dilatation.*

Proposition 22 (Perrin p98)**.** *$u\tau u^{-1}$ transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.*

Proposition 23 (Romb p140)**.** *[Perrin p99] $SL(E)$ est engendré par les dilatations.*

Proposition 24 (Romb p141)**.** *[Perrin p99] $GL(E)$ est engendré par les dilatations et les transvections.*

Proposition 25 (Nourdin p226)**.** *[Romb p135] Deux dilatations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même rapport. Deux transvections sont toujours conjuguées dans $GL(E)$. Si $n \geq 3$, elle le sont aussi dans $SL(E)$.*

1.3 Quelques sous-groupes particuliers

Centres et sous-groupes distingués

Application 26 (Romb p127)**.** *Centre de $GL(E)$ et de $SL(E)$.*

Application 27 (Romb p141)**.** *Groupes dérivés.*

Définition 28 (Romb p128)**.** *$PGL(E)$ et $PSL(E)$.*

Proposition 29 (Romb p128)**.** *Si K algébriquement clos, ils sont isomorphes.*

Sous-groupes finis

Proposition 30. *Si G est un sous-groupe fini, tous ses éléments sont diagonalisables.*

Proposition 31 (Romb p56)**.** *Matrice de permutation.* $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$. *$S_n$ s'injecte dans $GL_n(K)$.*

Théorème 32. *Théorème de Cayley.*

Théorème 33. *Théorème de Brauer*

Corollaire 34 (Romb p56)**.** *Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(F_q)$*

Proposition 35 (Romb p145)**.** *$T_n(F_q)$ sous-groupe de $GL_n(F_q)$ de card $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. C'est donc un p-Sylow.*

Théorème 36 (Romb p145)**.** *Premier théorème de Sylow.*

Théorème 37 (Romb p131)**.** *Théorème de Burnside.*

Théorème 38. *Représentation régulière ? Tout groupe G fini est isomorphe à un sous groupe de $GL(E)$ où $|E| = card(G)$.*

2 Actions de GL(E)

2.1 Action sur les sous espaces vectoriels dans les drapeaux

Proposition 39. *$GL(E)$ agit sur les sev de dim k fixée avec $u.F = u(F)$.*

Définition 40 (FGN ALG1 p263)**.** *Drapeau.*

Proposition 41 (Warusfel L2 p308)**.** *Action naturelle et transitive de $GL(E)$ sur les drapeaux. De plus, $u \in GL(E)$ vérifie, u est trigonalisable si et seulement si u est élément d'un stabilisateur de l'action.*

Proposition 42. *$GL(E)$ agit naturellement sur les décompositions de E en sommes directes de sev de dim 1 et$u \in GL(E)$ vérifie, u est diagonalisable si et seulement si u est élément d'un stabilisateur de l'action.*

Proposition 43. *Cardinal du cône nilpotent.*

2.2 Action par translation : pivot de Gauss

Définition 44 (H2G2 p209)**.** *Action par translation à gauche de GL_m sur $M_{m,n}$*

Définition 45 (H2G2 p230)**.** *Matrice de dilatation, de transvection. Liens avec les transvections et les dilatations.*

Proposition 46 (H2G2 p230)**.** *Description de l'action à gauche par des matrices d'opérations élémentaires.*

Proposition 47 (H2G2 p209)**.** *Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau. (Noyau : invariant complet)*

Définition 48 (H2G2 p204)**.** *Pivot. Matrice échelonnée en lignes + réduite.*

Proposition 49 (H2G2 2018 p209)**.** *Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en lignes. On l'obtient par pivot de Gauss.*

Proposition 50 (H2G2 2018 p234)**.** *Les matrices de transvections engendrent SL_n. GL_n est engendré par les matrices de dilatations et les matrices de transvections.*

Proposition 51. *SI A est une matrice carrée, il existe P tel que PA soit triangulaire supérieure.*

Application 52. *Résolution de systèmes linéaires. Décomposition LU. Calcul du déterminant. Calcul du rang.*

2.3 Action par équivalence

Définition 53 (H2G2 2018 p5). *Action par équivalence.*

Proposition 54 (H2G2 2018 p6). *[Théorème du rang] Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même rang. Dans ce cas, elles sont équivalentes à $I_{r,n-r}$.*

Proposition 55 (H2G2 2018 p10). *Nombre de matrices de $M_{m,n}(F_q)$ de rang r.*

Proposition 56 (H2G2 2018 p11). *Ces orbites ne sont pas fermées : Il existe des matrices de rang r aussi proches que l'on veut de la matrice nulle. Ainsi, le rang n'est pas continu.*

2.4 Action par conjugaison : réduction

Définition 57 (H2G2 2018 p122). *Action par conjugaison*

Remarque 58. *Cette action s'interprête comme un changement de bases.*

Proposition 59 (H2G2 2018 p122). *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles sont dans la même orbite. L'orbite est appelée classe de similitude.*

Proposition 60 (H2G2 2018 p141). *L'action stabilise l'ensemble des matrices diagonalisables.*

Proposition 61. *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son orbite contient une matrice diagonale. (Action très importante en théorie de la réduction.)*

Proposition 62 (H2G2 2018 p123). *Le polynôme caractéristique, le spectre sont des invariants totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.*

Contre exemple 63 (H2G2 2018 p123). *Le polynôme minimal est un invariant mais pas total.*

Théorème 64 (Gourdon p291). *Décomposition de Frobenius.*

Proposition 65 (Gourdon p291). *Les invariants de similitude constituent un invariant total de similitude.*

Proposition 66 (Gourdon p292). *Dans $M_n(\mathbb{R})$, $n = 2$ ou 3, deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même polynome caractéristique et même polynôme minimal. Faux si $n \geq 4$.*

2.5 Action par congruence : classification des formes quadratiques et étude du groupe orthogonal

Action par congruence

Définition 67. *Action par congruence sur M_n.*

Définition 68 (H2G2). *Action par congruence sur S_n. Matrices congruentes.*

Remarque 69. *L'équivalence des formes quadratiques revient à la congruence des matrices de leur forme polaire (dans une base donnée).*

Pour q une forme quadratique sur K de forme polaire A, les formes quadratiques équivalentes à q sont les formes quadratiques dont la forme polaire B est congruente à A.

Remarque 70. *Cette action s'interprête comme un changement de base pour l'application bilinéaire de matrice M.*

Proposition 71 (H2G2 p253). *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.*

Théorème 72 (H2G2 2018 p254). *Théorème de classification sur les corps classiques.*

Application 73 (H2G2). *Loi de réciprocité quadratique.*

Etude de certaines orbites

Définition 74 (H2G2 2018 p264). *Groupe d'isotropie/orthogonal. $O_n(q) = stab(A)$ où A est la matrice bilinéaire symétrique de la forme quadratique q.*

Proposition 75 (H2G2 p264). *C'est le groupe des matrices inversibles telles que $b(Px, Py) = b(x, y)$ où b est la forme polaire de q.*

Définition 76. *De même, on note $O(q, E) = \{u \in GL(E), q(u(x)) = q(x)$. Si E espace euclidien, bijection.*

Définition 77 (Perrin p125). *Symétrie, réflexion, renversement.*

Une réflexion orthogonale (renversement) est une matrice de O_n conjuguée dans O_n (SO_n) à la matrice suivante ...

Définition 78 (H2G2 p259 265). *$O_n(K)$ comme stabilisateurs de I_n dans $GL_n(K)$. $O_{p,q}(\mathbb{R})$ comme stabilisateur de $I_{p,q}$.*

Remarque 79 (H2G2 p259). *Dans le cas réel, on peut ramener l'étude des groupes d'isotropie à celles des groupes O_n et $O_{p,q}$.*

Définition 80 (Perrin p141). *$SO_n(\mathbb{R})$*

Théorème 81 (Perrin p143). *Tout élément de O_n peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions.*

Tout éléments de SO_n est produit d'au plus n renversements.

Corollaire 82 (Perrin p143). *O_n est engendré par les réflexions orthogonales.*

SO_n est engendré par les renversements.

Définition 83 (H2G2 p258). *S_n^{++} comme orbite de I_n.*

Proposition 84 (H2G2 p265). *Si deux formes quadratiques sont dans la même orbite pour l'action de congruence alors $O(q)$ et $O(q')$ sont isomorphes.*

Théorème 85. *Décomposition d'un élément de O_n.*

3 Etude topologique lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

3.1 Densité

Proposition 86 (Mneimé p14). *[Romb Thèmes pour l'agreg p39] $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$.*

Application 87 (Mneimé p15). *Il existe une base de $M_n(K)$ formée de matrices inversibles/*

Application 88 (Mneimé p14). $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Application 89 (Gourdon). *Différentielle du déterminant.*

3.2 Connexité et compacité

Proposition 90 (Mneimé). *[Romb Thèmes p45] $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.*

Application 91 (Mneimé). *Connexité de l'ensemble des projecteurs de rang p.*

Proposition 92 (Romb Thèmes p45). *$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'est.*

Proposition 93. *Réduction des endomorphismes orthogonaux.*

Proposition 94 (Mneimé p34). *O_n a deux composantes connexes homéomorphes. So_n est connexe.*

Proposition 95. *O_n est compact. SO_n aussi.*

Application 96. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Théorème 97 (H2G2 p348). *Décomposition polaire.*

Application 98 (H2G2 p351). *Maximalité du groupe orthogonal.*

3.3 Exponentielle matricielle et groupe linéaire

Définition 99 (H2G2 p355). *exp sur $M_n(K)$.*

Proposition 100. *exp est surjective sur $M_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 101. *$exp(M_n(\mathbb{R})$.*

Application 102. *GL_n n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.*

Proposition 103 (H2G2). *Homéomorphisme $exp : S_n^{++} \to S_n$.*

Proposition 104 (H2G2 p360). *Etude de $O_{p,q}$*